Rechnen mit Bruchtermen

Mit Bruchtermen kann wie mit Brüchen gerechnet werden. Die Definitionsmenge ist immer so zu bestimmen, dass kein Term im Nenner den Wert 0 annehmen kann!

1) Kürzen

Bruchterme lassen sich oft vereinfachen, indem man kürzt. Da man nur aus Produkten kürzen darf, werden Zähler und Nennerterm zunächst faktorisiert. Danach kann man auch die Definitionsmenge leichter bestimmen, zum Schluss wird gekürzt.

Beispiel: $\frac{4x-8}{x^2-4}$ Faktorisieren: $\frac{4x-8}{x^2-4}=\frac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)}$; D = Q \ {-2; 2} ; $\frac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{4}{x+2}$

2) Erweitern

Beim Erweitern multipliziert man den Zähler und den Nenner mit dem gleichen Faktor.

Beispiel: $\frac{5}{x+3}$; D = Q \ {-3} Erweitern mit 7: $\frac{5\cdot 7}{(x+3)\cdot 7}=\frac{35}{7x+21}$

Enthält der Erweiterungsterm eine Variable, muss ggf. die Definitionsmenge neu bestimmt werden!

Beispiel: $\frac{5}{x+3}$; D = Q \ {-3} Erweitern mit (x-1): $\frac{5\cdot(x-1)}{(x+3)\cdot(x-1)}=\frac{5x-5}{(x+3)\cdot(x-1)}$; D = Q \ {-3; 1}

3) Addieren und Subtrahieren

a) … bei gleichem Nenner: "Zählerterme addieren bzw. subtrahieren, Nenner beibehalten"

Beispiele: $\frac{1-x}{x}+\frac{5+3x}{x}=\frac{1-x+5+3x}{x}=\frac{6+2x}{x}$; D = Q \ {0}

$\frac{5}{x-2}-\frac{1+3x}{x-2}=\frac{5-(1+3x)}{x-2}=\frac{5-1-3x}{x-2}=\frac{4-3x}{x-2}$; D = Q \ {2}

Wird ein Bruch subtrahiert, dessen Zähler eine Summe ist, muss der Zähler in Klammern gesetzt werden!

b) … bei unterschiedlichem Nenner: zunächst einen Hauptnenner (HN) ermitteln, dann wie bei a)

Beispiel: $\frac{4}{3x^2}+\frac{1}{x^2-x}$; $3x^2 = 3 \cdot x \cdot x$; $x^2 - x = x \cdot (x-1)$

→ HN $= 3 \cdot x \cdot x \cdot (x-1)$ → D = Q \ {0;1}

Dann wird erweitert und addiert:

$$\frac{4}{3x^2}+\frac{1}{x^2-x}=\frac{4\times(x-1)+1\times 3x}{3x^2(x-1)}=\frac{4x-4+3x}{3x^2(x-1)}=\frac{7x-4}{3x^2(x-1)}$$

Alle Nenner vollständig faktorisieren. Der HN enthält jeden Faktor mindestens einmal. Kommt ein Faktor in einem der Nenner mehrmals vor, muss er im HN genau so oft vorkommen. Die Definitionsmenge bestimmt man aus dem HN!

4) Multiplizieren und Dividieren

Multiplizieren: "Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner"

Dividieren: "mit dem Kehrwert des Divisors multiplizieren"

Der Zähler des Divisors kommt beim Dividieren in den Nenner. Enthält er eine Variable, muss er auch für die Definitionsmenge berücksichtigt werden!

Beispiel: $\frac{3}{x-1}:\frac{x+2}{x-3}$ Definitionsmenge: Setze x – 1 = 0, x – 3 = 0 **und x + 2 = 0** → D = Q \ { 1; 3; -2 }

$$\frac{3}{x-1}:\frac{x+2}{x-3}=\frac{3}{x-1}\cdot\frac{x-3}{x+2}=\frac{3(x-3)}{(x-1)(x+2)}=\frac{3x-9}{(x-1)(x+2)}$$