

Bruchgleichungen, Verhältnisgleichungen

Enthält eine Gleichung mindestens einen Bruchterm (also eine Variable x im Nenner), heißt sie Bruchgleichung. Auch hier ist zunächst die Definitionsmenge zu bestimmen.

Bruchgleichungen sind oft als so genannte "Verhältnisgleichungen" gegeben, sie haben die Form:

$$\frac{\text{Term1}}{\text{Term2}} = \frac{\text{Term3}}{\text{Term4}}$$

Gelöst werden Verhältnisgleichungen durch "Multiplizieren über Kreuz", die Gleichung ist dann keine Bruchgleichung mehr:

$$\text{Term1} \cdot \text{Term4} = \text{Term3} \cdot \text{Term2}$$

und dann durch die üblichen schon bekannten Äquivalenzumformungen. Beachte: Zahlen, die nicht in der Definitionsmenge enthalten sind, können natürlich auch nicht in der Lösungsmenge enthalten sein!

Beispiel 1: $\frac{4}{x+2} = \frac{3}{x-1}$; $G = \mathbb{Q}$

Definitionsmenge: $x + 2 = 0$; $x = -2$
 $x - 1 = 0$; $x = 1$
 $\rightarrow D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 1\}$

$$\begin{aligned} 4 \cdot (x - 1) &= 3 \cdot (x + 2) \\ 4x - 4 &= 3x + 6 \\ x - 4 &= 6 \\ x &= 10 ; L = \{10\} \end{aligned}$$

Beispiel 2: $\frac{x}{3+x} = \frac{5}{8}$; $G = \mathbb{Q}$

Definitionsmenge: $3 + x = 0$; $x = -3$
 $\rightarrow D = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$

$$\begin{aligned} x \cdot 8 &= 5 \cdot (3 + x) \\ 8x &= 15 + 5x \\ 3x &= 15 \\ x &= 5 ; L = \{5\} \end{aligned}$$

Andere Bruchgleichungen: Hat eine Bruchgleichung nicht die oben angegebene Form, ist sie keine Verhältnisgleichung! Dann muss ein anderes Lösungsverfahren verwendet werden:

- Definitionsmenge bestimmen: die Definitionsmenge ist die Schnittmenge der Definitionsmengen aller in der Gleichung vorkommenden Bruchterme!
- Den Hauptnenner aller auftretenden Bruchterme bestimmen
- Beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren
- Alle Brüche so weit wie möglich kürzen \rightarrow die Gleichung ist dann keine Bruchgleichung mehr!

... (weiter wie bei den Verhältnisgleichungen!)