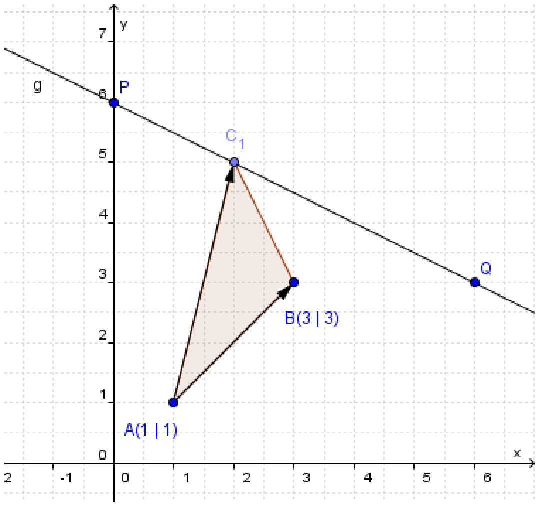
Aufgabe 1:

Die Punkte C_n einer Dreiecksschar ABC_n mit A(1/1) und B(3/3) liegen auf der Geraden g durch die Punkte P(0/6) und Q(6/3).

1. Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem.
2. Zeichne die Gerade g ein und ermittle durch Rechnung ihre Gleichung.
3. Berechne die y-Koordinate des Punktes $C_1(2/y)$ und zeichne ihn und das Dreieck ABC_1 ein.
4. Berechne den Flächeninhalt A(x) der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von der x-Koordinate der Punkte C_n.

Lösung:



1. → Zeichnung
2. Vektor $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

   Steigung $m = \dfrac{-3}{6} = -0{,}5$

   Punktsteigungsform für g: $y = -0{,}5\,(x - 0) + 6$;

   → g in Normalform: $y = -0{,}5\,x + 6$
3. $C_1 \in$ g: $\quad y = -0{,}5 \cdot 2 + 6 = 5 \;\rightarrow\; C_1(2/5)$
4. Die Punkte C_n haben wegen $C_n \in$ g die Koordinaten $C_n\,(x\,/\,-0{,}5x+6)$.

   Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; Vektor $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x-1 \\ -0{,}5x+6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ -0{,}5x+5 \end{pmatrix}$

   Flächenformel mit Determinante: $A(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & x-1 \\ 2 & -0{,}5x+5 \end{vmatrix}$ cm² $= \dfrac{1}{2}\,[\,2\,(-0{,}5x + 5) - 2\,(x - 1)\,]$ cm²

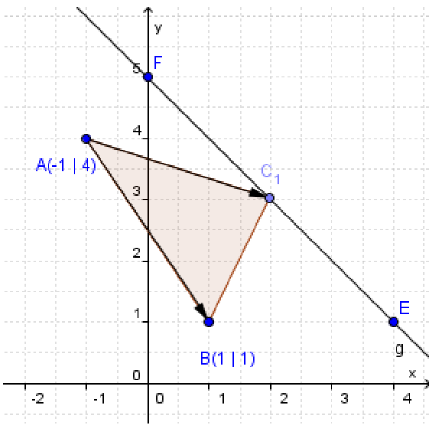
   $= \dfrac{1}{2}(-3\,x + 12)$ cm² $= (-1{,}5\,x + 6)$ cm²

Aufgabe 2:

Die Punkte C_n einer Dreiecksschar ABC_n mit A(−1/4) und B(1/1) liegen auf der Geraden g durch die Punkte E(4/1) und F(0/5).

1. Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem.
2. Zeichne die Gerade g ein und ermittle durch Rechnung ihre Gleichung.
3. Berechne die y-Koordinate des Punktes $C_1(2/y)$ und zeichne ihn und das Dreieck ABC_1 ein.
4. Berechne den Flächeninhalt A(x) der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von der x-Koordinate der Punkte C_n.

Lösung (Rechenweg wie bei Aufgabe 1):



Vektor $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$; Steigung $m = -1$; Gerade g: $y = -x + 5$;

Punkt $C_1(2/3)$; Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; Vektor $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x+1 \\ -x+1 \end{pmatrix}$;

$A(x) = (0{,}5\,x + 2{,}5)$ cm²

Aufgabe 3:

Der Eckpunkt A(-3/0) von Dreiecken AB_nC_n liegt fest. Die Eckpunkte B_n mit ß = 90° wandern auf der x-Achse, während sich die Eckpunkte C_n auf der Geraden g mit y = -1,5x + 7,5 bewegen.

a) Zeichne die Gerade g und zwei der möglichen Dreiecke für x = 1 und x = 4 in ein Koordinatensystem ein.

b) Gib die Koordinaten der Punkte B_n und C_n in Abhängigkeit von x an.

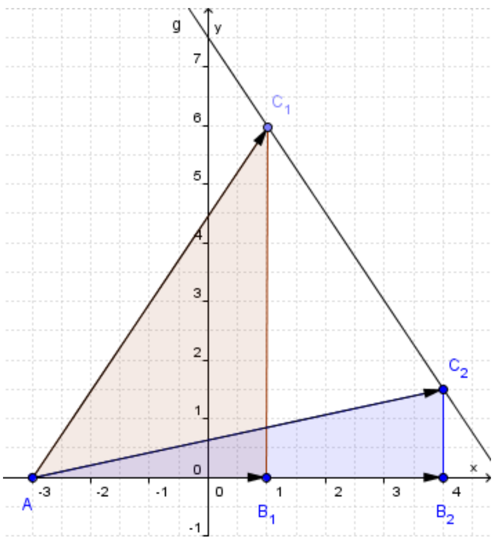
c) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke A in Abhängigkeit von x.

Ergebnis: A(x) = (- 0,75x² + 1,5x + 11,25) cm²

d) Berechne den maximal möglichen Flächeninhalt und den zugehörigen x-Wert.

Lösung:

a) → Zeichnung



b) B_n(x / 0) ; C_n(x / -1,5x + 7,5)

c) Die Punkte B_n liegen auf der x-Achse, die Punkte C_n liegen wegen ß = 90° genau "senkrecht über" B_n auf der Geraden g. Beide Punkte haben die gleiche x-Koordinate.

Verändert man x, wandern beide Punkte gemeinsam; die Seite $[B_nC_n]$ bleibt dabei immer parallel zur y-Achse.

$$\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} x-(-3) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x-(-3) \\ -1{,}5x+7{,}5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ -1{,}5x+7{,}5 \end{pmatrix}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x+3 & x+3 \\ 0 & -1{,}5x+7{,}5 \end{vmatrix} \text{ cm}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(x+3)(-1{,}5x+7{,}5) - 0\,(x+3) \right] \text{ cm}^2 =$$

$$= \ldots = (-0{,}75\,x^2 + 1{,}5\,x + 11{,}25) \text{ cm}^2$$

d) Quadratische Ergänzung des Terms A(x) = (– 0,75 x² + 1,5 x + 11,25) cm² ergibt

A(x) = [– 0,75 (x – 1)² + 12] cm² und damit A_{max} = 12 cm² für x = 1.