

Die Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Die Seiten im rechtwinkligen Dreieck haben besondere Namen:

Die "**Hypotenuse**" liegt dem rechten Winkel gegenüber, die "**Katheten**" schließen den rechten Winkel ein.

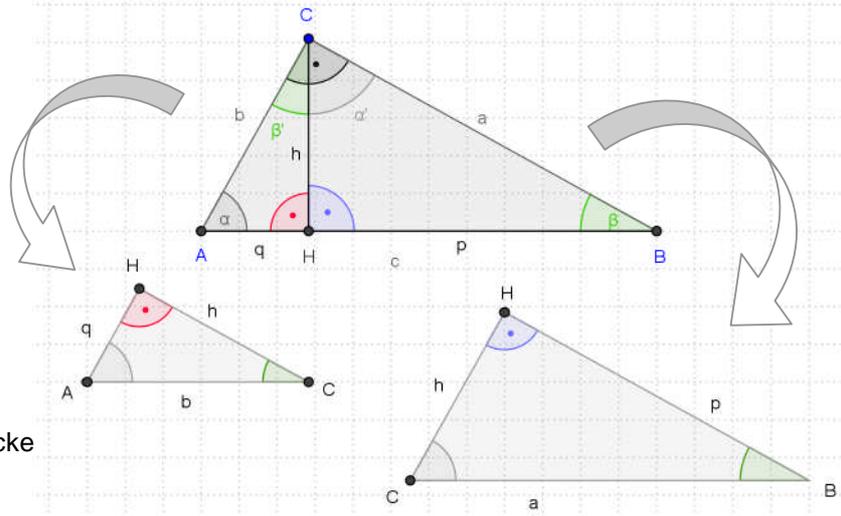
Die Höhe auf die Hypotenuse teilt ein rechtwinkliges Dreieck in zwei ebenfalls rechtwinklige Teildreiecke.

Im Dreieck ABC gilt: $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$

Im Dreieck AHC gilt: $\alpha + \beta' + 90^\circ = 180^\circ$

Im Dreieck HCB gilt: $\alpha' + \beta + 90^\circ = 180^\circ$

Daraus folgt $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$. Die drei Teildreiecke haben somit gleiche Innenwinkelmaße und sind zueinander ähnlich.

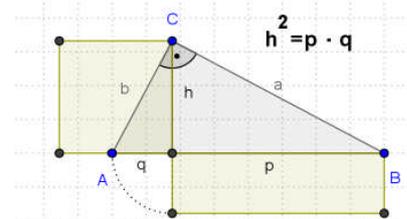


In der Zeichnung oben wurden die Teildreiecke aus dem Dreieck ABC "herausgelöst" und nochmals so dazu gezeichnet, dass alle drei Dreiecke in gleicher Lage zu sehen sind. Einander entsprechend liegende Seiten lassen sich so leichter erkennen. Mit der Ähnlichkeit werden nun die so genannten Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck hergeleitet.

Höhensatz

Da in ähnlichen Dreiecken einander entsprechend liegende Seiten im gleichen Verhältnis stehen, gilt für die Dreiecke AHC und HBC:

$$\frac{h}{q} = \frac{p}{h} \quad \text{und damit} \quad \mathbf{h^2 = p \cdot q}$$

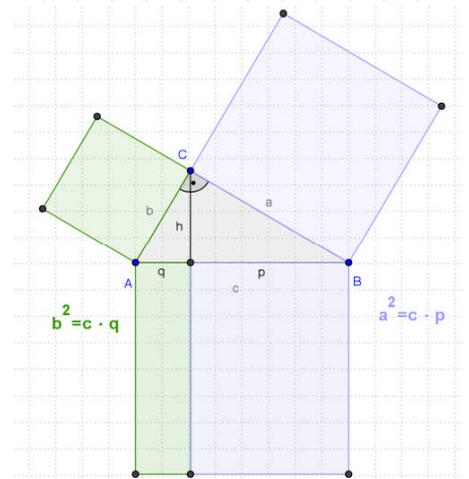


Das Quadrat über der Höhe hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.

Kathetensätze

Für die Dreiecke HBC und ABC gilt: $\frac{a}{p} = \frac{c}{a}$ und damit $\mathbf{a^2 = c \cdot p}$

Für die Dreiecke AHC und ABC gilt: $\frac{b}{q} = \frac{c}{b}$ und damit $\mathbf{b^2 = c \cdot q}$



Das Quadrat über einer Kathete hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt.

Hypotenusensatz, Satz des Pythagoras

Addiert man $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$, erhält man:

$$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot \underbrace{(p + q)}_{= c} = c \cdot c = c^2$$

Damit hat man einen der berühmtesten Lehrsätze der Mathematik hergeleitet, den Hypotenusensatz oder "Satz des Pythagoras":

$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$$

Die Summe der Quadrate über den Katheten hat den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse.

