## Relationen

Aus den Paaren (x/y) einer Produktmenge A x B als Grundmenge kann man durch eine Vorschrift bzw. Bedingung (z. B. in Form eines Satzes, einer Bedingung, einer Gleichung oder Ungleichung) die Zahlenpaare (x/y) aussortieren, die die Bedingung erfüllen. „Erfüllen“ bedeutet, dass **beim Belegen der Vorschrift mit einem Zahlenpaar eine wahre Aussage entsteht.**

Beispiel:

Welche Zahlenpaare (x/y) der Grundmenge A x B mit A = {1; 2; 3} und B = {1; 2; 3; 4; 5} erfüllen die Vorschrift $5x + 3y \leq 20$ ?

Als Grundmenge erhält man die Zahlenpaare

{(1/1); (1/2); (1/3); (1/4); (1/5);
(2/1); (2/2); (2/3); (2/4); (2/5);
(3/1); (3/2); (3/3); (3/4); (3/5)}

Die Ungleichung $5x + 3y \leq 20$ wirkt wie ein Sieb oder ein Filter: Belegt man sie der Reihe nach mit allen Paaren der Grundmenge, erhält man wahre und falsche Aussagen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1/1) einsetzen: | $5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \leq 20$ | $8 \leq 20$ | (w) |
| (1/2) einsetzen: | $5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \leq 20$ | $11 \leq 20$ | (w) |
| … | | | |
| (2/3) einsetzen: | $5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \leq 20$ | $19 \leq 20$ | (w) |
| (2/4) einsetzen: | $5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \leq 20$ | $22 \leq 20$ | (f) |
| (2/5) einsetzen: | $5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \leq 20$ | $25 \leq 20$ | (f) |
| (3/1) einsetzen: | $5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \leq 20$ | $18 \leq 20$ | (w) |
| (3/2) einsetzen: | $5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \leq 20$ | $21 \leq 20$ | (f) |
| (3/3) einsetzen: | $5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \leq 20$ | $24 \leq 20$ | (f) |
| … | | | |

Die Zahlenpaare, die zu **wahren Aussagen** führen, bilden die **Lösungsmenge** der Ungleichung.

**Lösungsmenge**: L = {(1/1); (1/2); (1/3); (1/4) (1/5); (2/1); (2/2); (2/3); (3/1)}

Eine auf diese Art entstandene Menge bekommt nun einen besonderen Namen:

**Definition:** **Die Lösungsmenge einer Vorschrift mit zwei Variablen heißt Relation. Sie besteht aus geordneten Paaren**. Die Vorschrift heißt **Relationsvorschrift.**

## Darstellung von Relationen

Die Zahlenpaare von Relationen können unterschiedlich dargestellt werden:

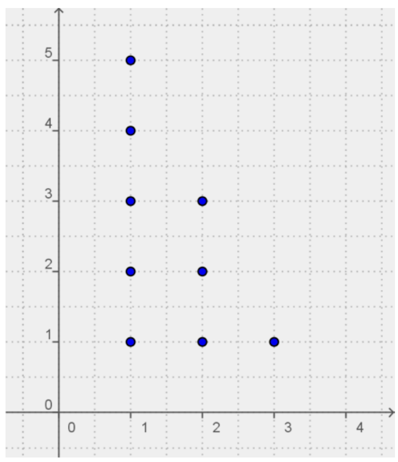
- in beschreibender Form; hier sieht man allerdings die Paare nicht:
  R ={(x/y) | $5x + 3y \leq 20$} mit G = {1; 2; 3} x {1; 2; 3; 4; 5}.

- in aufzählender Form: R = {(1/1); (1/2); (1/3); (1/4) (1/5); (2/1); (2/2); (2/3); (3/1)}

- in Tabellenform als Wertetabelle:

| x | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 1 |

- durch Punkte im Koordinatensystem als Graph:



**Beispiel 2:** Ermittle die Paare der Relation R mit der Vorschrift x · y = 12 und der Grundmenge G = N x N.

Grundmenge sind alle Paare (x/y) natürlicher Zahlen. Obwohl diese Produktmenge unendlich viele Zahlenpaare enthält, führen nur wenige davon in der Vorschrift x · y = 12 zu einer wahren Aussage.

Nach kurzem Probieren findet man die Lösungsmenge bzw. die Relation und kann sie angeben:
R= { (1/12); (2/6); (3/4); (4/3); (6/2); (12/1) }

### Ermitteln der Zahlenpaare von Relationen

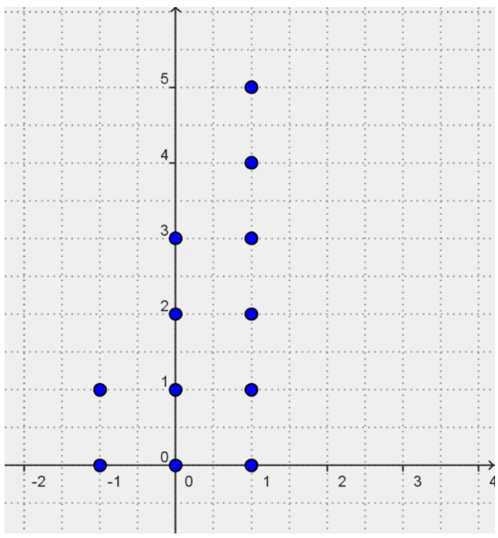
Meist sind die Paare einer Relation nicht so leicht wie im Beispiel x · y = 12 durch Probieren zu finden. Es empfiehlt sich daher, systematisch in folgenden Schritten vorzugehen:

1. Löse die Relationsvorschrift nach y auf, falls diese nicht schon so gegeben ist.
2. Belege x mit einer Zahl aus der Grundmenge für x und berechne dazu eine Bedingung für y.
3. Suche in der Grundmenge für y alle Zahlen, die die Bedingung erfüllen. Jede dieser Zahlen liefert zusammen mit der verwendeten Belegung von x ein Paar (x/y) der Relation. Gibt es keinen y-Wert, der die Bedingung erfüllt, dann gibt es zu der verwendeten Belegung von x auch kein Paar.
4. Führe die Schritte 1-3 dann für alle Zahlen aus der Grundmenge für x durch.

**Beispiel 3**: Ermittle die Paare der Relation R: y < 2x + 4 mit der Grundmenge G = $[-2; 1]_Z$ x $N_0$. Gib R in aufzählender Form an und zeichne den Graph.

| **Belegung für x** | **Bedingung für y** | **Zahlenpaare** |
|---|---|---|
| x = -2 | y < 2 · (-2) + 4 ; y < 0 | In $N_0$ gibt es kein solches y → kein Paar |
| x = -1 | y < 2 · (-1) + 4 ; y < 2 | (-1/0) ; (-1/1) |
| x = 0 | y < 2 · 0 + 4 ; y < 4 | (0/0) ; (0/1) ; (0/2) ; (0/3) |
| x = 1 | y < 2 · 1 + 4 ; y < 6 | (1/0) ; (1/1) ; (1/2) ; (1/3) ; (1/4) ; (1/5) |

R = {(-1/0) ; (-1/1) ; (0/0) ; (0/1) ; (0/2) ; (0/3) ; (1/0) ; (1/1) ; (1/2) ; (1/3) ; (1/4) ; (1/5)}



### Definitions- und Wertemenge von Relationen

Oft enthalten die Paare einer Relation nicht alle Elemente, die in den Grundmengen für x bzw. y zur Verfügung stehen. Die x- bzw. y-Werte aus den Grundmengen, die tatsächlich in den Paaren der Relation vorkommen, werden mit besonderen Namen zusammengefasst:

**Definition:** Alle **in den Paaren einer Relation vorkommenden x-Werte** bilden die **Definitionsmenge D** der Relation, alle **in den Paaren einer Relation vorkommenden y-Werte** bilden die **Wertemenge W** der Relation.

In dem oben bearbeiteten Beispiel 2 gilt damit: D = { -1 ; 0 ; 1 } und W = { 0 ; 1; 2 ; 3 ; 4 ; 5 }