

Sinussatz

Bisher haben wir nur bei rechtwinkligen Dreiecken Seitenlängen und Winkelmaße mit Hilfe von Sinus-, Kosinus- und Tangenswerten berechnen können.

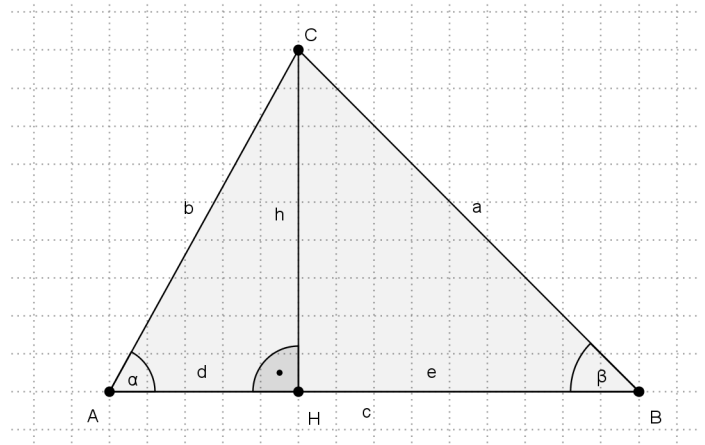
Nun werden wir **für Berechnungen in beliebigen Dreiecken** Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln herleiten.

Durch Einzeichnen einer Höhe erhält man zu jedem Dreieck zwei rechtwinklige Dreiecke, für die folgende Beziehungen gelten:

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} ; h = b \cdot \sin \alpha \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{h}{a} ; h = a \cdot \sin \beta$$

Da $h = h$ ist, gilt: $a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$ und damit $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$.

Zeichnet man eine der anderen Höhen ein, kann der entsprechende Zusammenhang auch für c und γ berechnet werden.



Damit erhält man den „Sinussatz“:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Der Sinussatz kann zur Dreiecksberechnung verwendet werden, wenn folgende Größen bekannt sind:

- 1) zwei Seiten und der Gegenwinkel der größeren Seite (**SsW**)
- 2) zwei Seiten und der Gegenwinkel der kleineren Seite; hier kann es je nach den gegebenen Größen 2 Dreiecke, 1 (rechtwinkliges) Dreieck oder auch kein Dreieck geben!
- 3) eine Seite und zwei Winkel (**SWW** bzw. **WSW**)

Flächenformel

Mit dem Term $h_c = b \cdot \sin \alpha$ erhalten wir auch eine neue Flächenformel für Dreiecke: $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin \alpha$

bzw. entsprechend für die anderen Seiten und Winkel: $A = \frac{1}{2} a b \sin \gamma = \frac{1}{2} b c \sin \alpha = \frac{1}{2} a c \sin \beta$

Kosinussatz

Sind drei Seitenlängen (**SSS**) oder zwei Seitenlängen und das Maß des Zwischenwinkels (**SWS**) eines Dreiecks gegeben, kann der Sinussatz nicht verwendet werden. Mit dem oben gezeichneten Dreieck leitet man daher eine Formel her, die genau diese Größen enthält:

$$1) \sin \alpha = \frac{h}{b} ; h = b \cdot \sin \alpha$$

$$2) \cos \alpha = \frac{d}{b} ; d = b \cdot \cos \alpha$$

$$3) e = c - d = c - b \cdot \cos \alpha$$

$$4) a^2 = e^2 + h^2$$

$$5) a^2 = (c - b \cdot \cos \alpha)^2 + (b \cdot \sin \alpha)^2$$

$$a^2 = c^2 - 2 c b \cos \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha + b^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$a^2 = b^2 \cdot (\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{=1}) + c^2 - 2 b c \cos \alpha$$

Diese Formel kann entsprechend auch für β bzw. γ hergeleitet werden; sie heißt "Kosinussatz":

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 a c \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos \gamma$$

Soll ein Winkelmaß berechnet werden, wird der Satz oft auch nach dem Kosinus aufgelöst verwendet:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

und entsprechend ...