

Berechnungen an allgemeinen Dreiecken mit Sinussatz und Kosinussatz

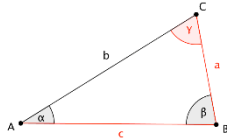
Je nach Lage der drei gegebenen Größen beginnt die Berechnung mit dem Sinussatz oder dem Kosinussatz:

SSS, SWS $\rightarrow$ Beginne mit dem Kosinussatz
 WSW, SSW, SsW, sSW $\rightarrow$ Beginne mit dem Sinussatz

Für die weiteren Rechenschritte sind dann nahezu immer mehrere Rechenwege möglich.

1. Beispiel: Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $a = 5 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$ und $\gamma = 70^\circ$. Berechne b , α und β .

Planfigur:



Zeichne zunächst eine Planfigur und trage die gegebenen Stücke ein!

$$\frac{\sin \alpha}{5 \text{ cm}} = \frac{\sin 70^\circ}{8 \text{ cm}} \quad \text{Die Maßeinheit cm kann hier auch entfallen:}$$

$$\frac{\sin \alpha}{5} = \frac{\sin 70^\circ}{8} ; \sin \alpha = \frac{5 \sin 70^\circ}{8} = 0,587307888$$

$$\alpha = \sin^{-1}(0,587307888) = 35,97^\circ$$

Fall SsW $\rightarrow$ Sinussatz $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$

Tipp: Setze den Sinussatz immer so an, dass die gesuchte Größe links im Zähler steht: $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$

$$\beta = 180^\circ - 70^\circ - 35,97^\circ = 74,03^\circ$$

Der Winkel β wird mit der Innenwinkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ bzw. $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$ berechnet.

$$\frac{b}{\sin 74,03^\circ} = \frac{8 \text{ cm}}{\sin 70^\circ} ; b = \frac{8 \text{ cm} \cdot \sin 74,03^\circ}{\sin 70^\circ} = 8,18 \text{ cm}$$

Die Seite b wird wieder mit dem Sinussatz berechnet. Möglich wäre aber auch der Kosinussatz in der Form mit β .

2. Beispiel: Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $a = 7 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ und $c = 10 \text{ cm}$. Berechne α , β und γ

Hier liegt der Fall SSS vor, eine Planfigur bringt hier keine weiteren Informationen und kann daher entfallen!

$$\begin{aligned} 7^2 &= 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos \alpha \\ 49 &= 136 - 120 \cdot \cos \alpha \\ -87 &= -120 \cdot \cos \alpha \\ 0,725 &= \cos \alpha \\ \alpha &= \cos^{-1}(0,725) = 43,53^\circ \end{aligned}$$

Der Winkel α wird mit dem Kosinussatz berechnet:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \beta}{6} &= \frac{\sin 43,53^\circ}{7} \\ \sin \beta &= \frac{6 \cdot \sin 43,53^\circ}{7} = 0,590343674 \\ \beta &= \sin^{-1}(0,590343674) = 36,18^\circ \end{aligned}$$

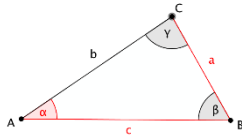
Der Winkel β wird entweder wieder mit dem Kosinussatz $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$ (diesmal in der Form mit β) oder mit dem Sinussatz berechnet: $\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a}$

$$\gamma = 180^\circ - 43,53^\circ - 36,18^\circ = 100,29^\circ$$

Der Winkel γ wird mit der Innenwinkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ bzw. $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ berechnet.

3. Beispiel: Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $a = 7,8 \text{ cm}$, $c = 9 \text{ cm}$ und $\alpha = 55^\circ$. Berechne b , β und γ .

Planfigur:



Zeichne zunächst eine Planfigur und trage die gegebenen Stücke ein!

Beachte, dass hier die **kleinere** Seite dem Winkel gegenüberliegt $\rightarrow$ Fall sSW. Hier kann es für das Dreieck zwei Lösungen, eine Lösung oder keine Lösung geben. Dies stellt sich erst bei der Berechnung heraus.

$$\frac{\sin \gamma}{9} = \frac{\sin 55^\circ}{7,8}$$

Fall sSW $\rightarrow$ Die Berechnung beginnt mit dem Sinussatz

$$\sin \gamma = \frac{9 \sin 55^\circ}{7,8} = 0,945175435$$

$$\gamma = \sin^{-1}(0,945175435) = 70,94^\circ \vee \gamma = 180 - 70,94^\circ = 109,06^\circ$$

Wegen der Beziehung $\sin \alpha = \sin(180 - \alpha)$ gibt es im Intervall $[0^\circ; 180^\circ]$ für jeden Sinuswert immer zwei Winkel, nämlich α und $180^\circ - \alpha$.

Die Berechnung mit dem Sinussatz liefert nur einen dieser Winkel, an den anderen musst du selbst denken!

Für das hier gegebene Dreieck gibt es also zwei Lösungen mit den Winkelmaßen $\gamma_1 = 70,94^\circ$ und $\gamma_2 = 109,06^\circ$.

Daher sind nun auch zwei Winkel β_1 und β_2 und zwei Seiten b_1 und b_2 zu berechnen. Dies wird jeweils mit der Innenwinkelsumme bzw. wieder mit dem Sinussatz durchgeführt:

$$\beta_1 = 180^\circ - 55^\circ - 70,94^\circ = 54,06^\circ$$

$$\frac{b_1}{\sin 54,06^\circ} = \frac{7,8 \text{ cm}}{\sin 55^\circ} ; b_1 = \frac{7,8 \text{ cm} \cdot \sin 54,06^\circ}{\sin 55^\circ} = 7,71 \text{ cm}$$

$$\beta_2 = 180^\circ - 55^\circ - 109,06^\circ = 15,94^\circ$$

$$\frac{b_2}{\sin 15,94^\circ} = \frac{7,8 \text{ cm}}{\sin 55^\circ} ; b_2 = \frac{7,8 \text{ cm} \cdot \sin 15,94^\circ}{\sin 55^\circ} = 2,62 \text{ cm}$$