

Eigenschaften der zentrischen Streckung mit ausführlicher Begründung

Aus der Abbildungsvorschrift der zentrischen Streckung ergeben sich folgende Eigenschaften:

- 1) Jeder Bildpunkt wird mit der Abbildung $P' \xrightarrow{Z; \frac{1}{k}} P$ wieder zurück auf den Ursprung abgebildet.

Begründung: $\overline{ZP'} = |k| \cdot \overline{ZP} \rightarrow \overline{ZP'} : |k| = \overline{ZP} \rightarrow \overline{ZP} = \left| \frac{1}{k} \right| \cdot \overline{ZP'}$

- 2) Das Zentrum Z ist der einzige Fixpunkt, alle Geraden durch das Zentrum Z sind Fixgeraden.

Begründung:

- Bildet man Z selbst ab, erhält man: $\overline{ZZ'} = |k| \cdot \overline{ZZ} = |k| \cdot 0 \text{ cm} = 0 \text{ cm} \rightarrow Z = Z' \rightarrow Z$ ist Fixpunkt
 - Wegen $\overline{ZP'} = |k| \cdot \overline{ZP}$ muss P' für $k \neq 1$ ein anderer Punkt als P sein, also ist er kein Fixpunkt
 - Alle Bildpunkte von Punkten einer Geraden durch Z liegen wieder auf derselben Geraden. Die Gerade als Ganzes wird damit auf sich selbst abgebildet und ist eine Fixgerade.
- 3) Geraden, die nicht durch das Zentrum Z verlaufen, sind zu ihren Bildgeraden parallel (entsprechendes gilt für Halbgeraden und Strecken).

Begründung: Wären eine Bildgerade g' und ihre Urgerade g nicht parallel, würden sie sich in einem Punkt S schneiden. Dieser wäre dann ein Punkt der Urgeraden g und der Bildgeraden g', also ein Fixpunkt. Da aber Z der einzige Fixpunkt ist, kann das nicht sein.

- 4) Alle Strecken [AB] werden auf Bildstrecken [A'B'] mit |k| - facher Länge abgebildet.

- Begründung: Für $Z \notin AB$ gilt in nebenstehender Zeichnung:
 $[ZP] \parallel [AB]$ und $\overline{ZP} = \overline{AB} \rightarrow ZABP$ ist ein Parallelogramm.
 Mit Eigenschaft 5) ist dann $ZA'B'P'$ ebenfalls ein Parallelogramm. Dann gilt:
 $\overline{ZP'} = |k| \cdot \overline{ZP}$, $\overline{ZP'} = \overline{A'B'}$ und $\overline{ZP} = \overline{AB} \rightarrow \overline{A'B'} = |k| \cdot \overline{AB}$

- Für $Z \in AB$ gilt: $\overline{A'B'} = \overline{ZB'} - \overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZB} - k \cdot \overline{ZA} = k \cdot (\overline{ZB} - \overline{ZA}) = k \cdot \overline{AB}$

- 5) Die zentrische Streckung ist nicht längentreu und nicht flächentreu und daher keine Kongruenzabbildung

Begründung: Für $k \neq 1$ werden alle Längen und damit auch alle Flächen vergrößert oder verkleinert, können also nicht kongruent sein.

- 6) Aus den Eigenschaften 2, 3 und 4 folgt: Die zentrische Streckung ist winkeltreu, kreistreu und geradentreu.

Begründung:

- Jeder Schenkel wird auf einen zu sich parallelen Schenkel abgebildet, die Bildschenkel bilden daher wieder den gleichen Winkel wie die Urschenkel.
 - Jeder Radius r wird auf einen Bildradius $r' = k \cdot r$ abgebildet. Alle Bildpunkte von Punkten eines Kreises haben damit von ihrem Mittelpunkt M' die gleiche Entfernung r', also entsteht wieder ein Kreis.
- 7) Die zentrische Streckung ist teilverhältnistreu. Das bedeutet: stehen die Längen von Strecken in einem bestimmten Verhältnis, so stehen die Längen ihrer Bildstrecken im gleichen Verhältnis.

Begründung: Wenn $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{a}{b}$ ist, dann gilt auch $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{k \cdot \overline{AB}}{k \cdot \overline{CD}} = \frac{a}{b}$.

- 8) Für die Maße abgebildeter Flächen gilt: $A' = k^2 \cdot A$

Begründung: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$; $A' = \frac{1}{2} \cdot g' \cdot h' = \frac{1}{2} \cdot k \cdot g \cdot k \cdot h = k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = k^2 \cdot A$

