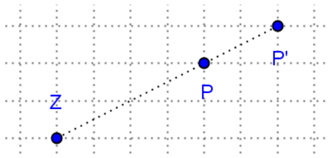
Eigenschaften der zentrischen Streckung ("Fundamentalsätze")

1) Jeder Punkt Z der Zeichenebene kann Streckungszentrum und jede Zahl $k \neq 0$ Streckungsfaktor einer zentrischen Streckung sein.

2) Jeder Punkt P der Zeichenebene wird umkehrbar eindeutig auf einen Bildpunkt P' abgebildet. Für den (nicht sinnvollen) Sonderfall k = 1 würde jeder Punkt auf sich selbst abgebildet.

3) Abbildungsvorschrift:
   - Zentrum Z, Urpunkt P und Bildpunkt P' liegen auf einer Geraden
   - Die Länge der Strecke von Z zu P' beträgt das |k|-fache der Länge der Strecke von Z zu P. Gleiches gilt für die Beträge der Vektoren $\overrightarrow{ZP'}$ und $\overrightarrow{ZP}$.



4) Fixelemente:
   Aus der Abbildungsvorschrift folgt: Das Zentrum Z ist der einzige Fixpunkt, alle Geraden durch das Zentrum Z sind Fixgeraden.

   Begründung:

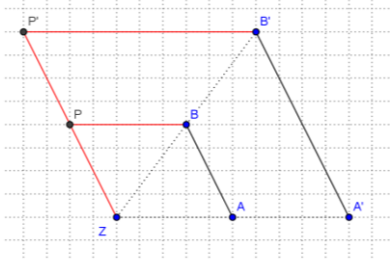
   - *Setzt man Z selbst als Urpunkt in die Abbildungsgleichung* $\overline{ZP'} = |k| \cdot \overline{ZP}$ *ein, so erhält man:*
     $\overline{ZZ'} = |k| \cdot \overline{ZZ} = |k| \cdot 0\,cm = 0\,cm$ → *Z = Z' ; Z wird also auf sich selbst abgebildet und ist Fixpunkt.*
   - *Wegen* $\overline{ZP'} = |k| \cdot \overline{ZP}$ *muss P' für* $k \neq 1$ *ein anderer Punkt als P sein, also ist er kein Fixpunkt.*
   - *In der Abbildungsvorschrift heißt es: "Urpunkt P, Bildpunkt P' und Zentrum Z liegen auf einer Geraden".*

     Alle Punkte einer Geraden durch Z liegen also wieder auf derselben Geraden. Die Gerade als Ganzes wird auf sich selbst abgebildet und ist daher eine Fixgerade.

5) Geraden, die nicht durch das Zentrum Z verlaufen, sind zu ihren Bildgeraden parallel (entsprechendes gilt für Halbgeraden und Strecken).

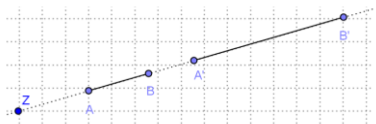
   Begründung: Wären Bildgerade und Urgerade nicht parallel, würden sie sich in einem Punkt schneiden. Dieser wäre dann ein Punkt der Urgeraden g und der Bildgeraden g', also ein Fixpunkt. Da aber Z der einzige Fixpunkt ist, kann das nicht sein.

6) Alle Strecken [AB] werden auf Bildstrecken [A'B'] mit |k| - facher Länge abgebildet.



   Begründung:

   - *Für* $Z \notin AB$ *gilt in nebenstehender Zeichnung:*
     [ZP] || [AB] und $\overline{ZP} = \overline{AB}$ → *ZABP ist ein Parallelogramm.*
     Mit Eigenschaft 5) ist dann ZA'B'P' ebenfalls ein Parallelogramm. Dann gilt: $\overline{ZP'} = |k| \cdot \overline{ZP}$, $\overline{ZP'} = \overline{A'B'}$ *und* $\overline{ZP} = \overline{AB}$ → $\overline{A'B'} = |k| \cdot \overline{AB}$
   - *Für* $Z \in AB$ *gilt:* $\overline{A'B'} = \overline{ZB'} - \overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZB} - k \cdot \overline{ZA} = k \cdot (\overline{ZB} - \overline{ZA}) = k \cdot \overline{AB}$



7) Aus der Abbildungsvorschrift folgt: Die zentrische Streckung ist nicht längentreu und nicht flächentreu und daher keine Kongruenzabbildung.

   Begründung: Für $k \neq 1$ *werden alle Längen und damit auch alle Flächen vergrößert oder verkleinert, können also nicht kongruent sein.*

8) Aus den Eigenschaften 5 und 6 folgt: Die zentrische Streckung ist winkeltreu, kreistreu und geradentreu.

Begründung:

- *Winkelmaße sind nur von der Lage ihrer Schenkel abhängig. Jeder Schenkel wird auf einen zu sich parallelen Schenkel abgebildet, die Bildschenkel bilden daher wieder den gleichen Winkel.*

- *Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die vom Mittelpunkt M eine bestimmte Entfernung r haben. Der Mittelpunkt M wird auf einen Bildpunkt M' abgebildet, jeder Radius r auf einen Bildradius r' = k·r. Das Bild des Kreises ist dann die Menge aller Punkte, die vom Mittelpunkt M' die Entfernung r' haben, also wieder ein Kreis.*

9) Die zentrische Streckung ist teilverhältnistreu, das bedeutet: stehen die Längen von Strecken in einem bestimmten Verhältnis, so stehen die Längen ihrer Bildstrecken im gleichen Verhältnis.

Begründung: Wenn $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{a}{b}$ *ist, dann gilt auch* $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{k \cdot \overline{AB}}{k \cdot \overline{CD}} = \frac{a}{b}$.

10) Für die Maße abgebildeter Flächen gilt: $A' = k^2 \cdot A$

Begründung: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$; $A' = \frac{1}{2} \cdot g' \cdot h' = \frac{1}{2} \cdot k \cdot g \cdot k \cdot h = k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = k^2 \cdot A$